数理解析研究所講究録
55巻 1968年 107-114



# On positive contraction semi-groups

都立大 理　長谷川 実

§1.　以下取り扱う作用素はすべて線形作用素とする。

正の縮少作用素より成る半群（略してPC半群）$\Sigma \equiv \{T_t ; t \geq 0\}$ を Banach 束 X 上で考える。$\tilde{\Sigma} \equiv \{\tilde{T}_t ; t \geq 0\}$ を他のPC半群としたときに

$$\tilde{T}_t x \geq T_t x \qquad (x \geq 0,\ t \geq 0)$$

が成り立つならば $\tilde{\Sigma}$ は $\Sigma$ を dominate するという。

Markov 過程論における研究を背景として G.E.H. Reuter [1] は 次のような問題を 抽象L空間Xにおいて考えた：

(*) 与えられたPC半群 $\Sigma$ に対して これを dominate するPC半群 $\tilde{\Sigma}$ を構成すること。

この論文 [1] に 次の結果が得られている。

定理1·a　稠密な定義域を持つ作用素 A が PC半群の生成作用素であるための条件は

(1)　$(e, Ax) \leq 0 \qquad (x \geq 0,\ x \in D(A))$

ここで　$(e, x) \equiv \|x^+\| - \|x^-\|$,

(2)　任意の $\lambda > 0$ に対して　正の解作用素 $R(\lambda; A) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$ が $X$ 上に存在する。

<u>定理 1·b</u>　$A$ を与えられた PC 半群 $\Sigma$ の生成作用素とする。$\tilde{A}$ を $D(\tilde{A}) = D(A)$ なる作用素とすると　これが $\Sigma$ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1)　$(e, \tilde{A}x) \leqq 0 \qquad (x \geqq 0,\ x \in D(A))$,

(2)　$\tilde{A}x \geqq Ax \qquad (x \geqq 0,\ x \in D(A))$,

(3)　定理 1·a の条件 (2) において $A$ を $\tilde{A}$ で置き換えたもの。

特に

$$A_z x \equiv Ax - (e, Ax)z \qquad (z \geqq 0,\ 0 < \|z\| \leqq 1)$$

は $\Sigma$ を dominate する PC 半群 $\Sigma_z$ の生成作用素となる。

これに続いて I. Miyadera [2] は次の結果を得た（記号を上記の通りにする）:

<u>定理 2·b</u>　$A$ と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ が $\Sigma$ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1)
(2)　} 定理 1·b に同じ,

(3)　次の二つの条件のいずれかをみたすこと;

i)　$(I - (\tilde{A} - A)R(\lambda; A))X = X \qquad (\lambda > 0)$.

ii)　$\sum_{k=0}^{\infty} \| \{(\tilde{A} - A)R(\lambda; A)\}^k x \| < \infty \qquad (\lambda > 0,\ x \geqq 0)$.

また　この論文〔2〕では上記$\Sigma_z$と異なる形の$\Sigma$をdominateするPC半群の例が得られている。

この問題(*)を任意のBanach束X上で考えよう。このためにR.S. Phillips〔3〕による吉田－Hilleの定理の一つの変形を与える。

<u>定理 3.a</u>　稠密な定義域を持つ作用素AがPC半群の生成作用素であるための条件は

(1)　$[Ax, x^+] \leq 0 \qquad (x \in D(A))$,

(2)　$(I - A)D(A) = X$.

ここで　$[x, y]$は特別な半スカラー積である，即ち$X \times X$上の次の条件をみたす実数値関数である：

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z], \quad [\lambda x, y] = \lambda [x, y]$$

$$[x, x] = \|x\|^2, \quad |[x, y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

$$[x, y] \geq 0 \quad (x, y \geq 0), \quad [x, x^+] = \|x^+\|^2.$$

A. Olubummo〔4〕はこの定理を用いてReuter－Miyaderaの結果が一般のBanach束X上で成り立つことを示した。

<u>定理 4.b</u>　Aを与えられたPC半群$\Sigma$の生成作用素とする。Aと同じ定義域を持つ作用素$\tilde{A}$が$\Sigma$をdominateするPC半群$\tilde{\Sigma}$の生成作用素であるための条件は

(1)　$[\tilde{A}x, x^+] \leq 0 \qquad (x \in D(A))$,

(2)　$\tilde{A}x \geq Ax \qquad (x \geq 0,\ x \in D(A))$,

(3) $\quad (I-(\tilde{A}-A)R(\lambda;A))X = X \qquad (\lambda>0)$。

ここで $B=\tilde{A}-A$ が $X$ 上の有界作用素に拡張されるとき条件 (3) は不要である。

§2. ここでは定理 1·b, 2·b, 4·b における条件 (3) の持つ役割について考えたい [5]。Banach束 $X$ が次の条件をみたすものと仮定する：

正の単調増加列 $\{x_n\}$ が

$$\sup_n \|x_n\| < \infty$$

をみたすならば ある $x_0 \in X$ が存在して $\lim \|x_n - x_0\| = 0$ が成り立つ（例えば 小笠原藤次郎 束論 II）。

定理 5·b　$A$ を与えられた PC 半群 $\Sigma$ の生成作用素とする。$A$ と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ をとればその適当な閉拡張が $\Sigma$ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

(1) $\quad [\tilde{A}x, x] \leqq 0 \qquad (x \in D(A))$,

(2) $\quad \tilde{A}x \geqq Ax \qquad (x \geqq 0,\ x \in D(A))$。

この定理の証明の要約を記す。$B=\tilde{A}-A$ とし

$$A_{n,\lambda} \equiv A + (n-\lambda)BR(n;A) \qquad (n \geqq \lambda),$$

$$B_{n,\lambda} \equiv A_{n+1,\lambda} - A_{n,\lambda}$$

$$= BR(n+1;A)(\lambda-A)R(n;A) \qquad (n \geqq \lambda)$$

とおく。ここで $\sup_{n,\lambda}\|B_{n,\lambda}\| \leqq L$ に注意しておく。

もし正の解作用素 $R(\lambda;A_{n,\lambda}) = (\lambda I - A_{n,\lambda})^{-1}$ が $\lambda > L$ に存在したとすると、$\lambda R(\lambda;A_{n,\lambda})$ は縮小作用素であることを示そう。任意の $x \geqq 0$ に対して

$$\lambda \| R(\lambda;A_{n,\lambda})x \|^2$$

$$= [\lambda R(\lambda;A_{n,\lambda})x,\ R(\lambda;A_{n,\lambda})x]$$

$$\leqq [(\lambda - \tilde{A})R(\lambda;A_{n,\lambda})x,\ R(\lambda;A_{n,\lambda})x]$$

$$= [x,\ R(\lambda;A_{n,\lambda})x]$$

$$- [BR(n;A)(\lambda - A)R(\lambda;A_{n,\lambda})x,\ R(\lambda;A_{n,\lambda})x]$$

$$\leqq [x,\ R(\lambda;A_{n,\lambda})x]$$

$$\leqq \|x\|\,\|R(\lambda;A_{n,\lambda})x\|$$

これより任意の $x \in X$ に対して $\|\lambda R(\lambda;A_{n,\lambda})\| \leqq 1$

を得る。

次に正の解作用素 $R(\lambda;A_{n,\lambda}) = (\lambda I - A_{n,\lambda})^{-1}$ が $\lambda > L$ に存在することを $n$ に関する帰納法を用いて示そう。$R(\lambda;A_{n,\lambda})$ の存在をある $n \geqq \lambda > L$ に対して仮定すると、

$$\|B_{n,\lambda}R(\lambda;A_{n,\lambda})\| \leqq \frac{1}{\lambda}\|B_{n,\lambda}\|\,\|\lambda R(\lambda;A_{n,\lambda})\| < 1$$

より

$$R(\lambda;A_{n+1,\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda;A_{n,\lambda})\{B_{n,\lambda}R(\lambda;A_{n,\lambda})\}^k$$

となり、しかも $B_{n,\lambda}R(\lambda;A_{n,\lambda})$ が正であることから、

$$R(\lambda;A_{n+1,\lambda})x \geqq R(\lambda;A_{n,\lambda})x \geqq 0 \quad (x \geqq 0).$$

を得る。また Banach束 X に対する仮定から

$$\lim_{n,n'\to\infty} \| R(\lambda;A_{n,\lambda})x - R(\lambda;A_{n',\lambda})x \| = 0$$

を得る。次に

$$R(\lambda-\mu;A_{n,\lambda}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} R(\lambda;A_{n,\lambda})^k \qquad (|\mu|<\lambda)$$

に注目すると，$\{R(\lambda';A_{n,\lambda})x\}$ $(|\lambda'|<\lambda)$ も $n$ に関する Cauchy 列となり，$\lambda' R(\lambda';A_{n,\lambda})$ $(0<\lambda'<\lambda)$ は正の縮少作用素である。

$$\widetilde{R}(\lambda;A_k)x \equiv \lim_{n\to\infty} R(\lambda;A_{n,k})x \qquad (x\in X)$$

とおく。$\{\widetilde{R}(\lambda;A_k);\ \lambda\leqq k\}$ は

(1) $\widetilde{R}(\lambda;A_k)-\widetilde{R}(\lambda';A_k) = (\lambda'-\lambda)\widetilde{R}(\lambda;A_k)\widetilde{R}(\lambda';A_k)$ $(\lambda,\lambda'\leqq k)$,

(2) $\lambda\|\widetilde{R}(\lambda;A_k)\| \leqq 1$

(3) $\widetilde{R}(\lambda;A_{k'}) = R(\lambda;A_k)$ $\qquad (\lambda<k<k')$

をみたすことがわかる。よって

$$\widetilde{R}(\lambda) \equiv \widetilde{R}(\lambda;A_k) \qquad (\lambda\leqq k)$$

とおけば　$E=\lambda I-\widetilde{R}(\lambda)^{-1}$ が $\Sigma$ を dominate する PC 半群 $\widetilde{\Sigma}$ の生成作用素であり，E は $\widetilde{A}$ の閉拡張になっている。逆は明らかである。

この証明において X に関する仮定は重要な役割を持っていて　この方法では一般の Banach束においてこの証明をそのまま使うことは出来ない。一般の Banach束における定理5.6 に対応する結果についての議論はまだ出されていないようであ

る。最後にこの定理における条件(1)は $X \times X$ 上の実数値関数 $\tau(x, y) = \lim_{a \to 0+} a^{-1}(\|x + ay\| - \|x\|)$ によって

$$(1') \qquad \tau(x, \widetilde{A}x) \leqq 0 \qquad (x \in D(\widetilde{A}))$$

で置き換えられることに注意する(M.Hasegawa, On contraction semi-groups and (di)-operators, J. Math. Soc. Japan 18(1966), 290-302)。また定理3.a, 4bにおける条件(1)もそれぞれ

$$(1') \qquad \tau'(x^+, Ax) \leqq 0 \qquad (x \in D(A))$$

$$(1') \qquad \tau'(x^+, \widetilde{A}x) \leqq 0 \qquad (x \in D(\widetilde{A}))$$

で置き換えられる。ここで

$$\tau'(x, y) = \frac{1}{2}\{\tau(x, y) - \tau(x, -y)\}.$$

佐藤健一氏の On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices (to appear) にこの方面に関する新しい結果が見られる。

## 文　献

[1] G. E. H. Reuter, A note on contraction semi-groups, Math. Scand. 3(1955), 275-280.

[2] I. Miyadera, A note on contraction semi-groups of operators, Tôhoku Math. J. 11(1961), 679-698.

[3] R. S. Phillips, Semi-groups of positive contraction

operators, Czechoslovak Math. J. 12 (1962), 294–313.

[4] A. Olubummo, A note on perturbation theory of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1964), 818–822.

[5] M. Hasegawa, On the convergence of resolvents of operators, Pacific J. Math. 21 (1967), 35–47.